

Progressão Aritmética

P.A. é qualquer sequência numérica na qual, a partir do segundo, cada termo é igual à soma de seu antecessor com uma constante, a razão (r).

Exemplo: (-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7...) $\longrightarrow r = a_2 - a_1 = -3 - (-5) \quad r=2$

1. Classificação:

$r > 0$: P.A. crescente (1, 5, 9, 13, 17, 21) $r=4$

$r < 0$: P.A. decrescente (15, 11, 7, 3, -1, -5, -9) $r=-4$

$r = 0$: P.A. constante (3, 3, 3, 3, 3, ...) $r=0$

2. Notação especial:

PA de 3 termos: (x, x + r, x + 2r) ou (x - r, x, x + r)

PA de 4 termos: (x, x + r, x + 2r, x + 3r)

PA de 5 termos: (x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r) ou (x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)

3. Fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

a_n = termo geral

a_1 = primeiro termo

n = número de termos

r = razão da P.A.

S_n = soma

4. Soma finita dos termos da PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$$

5. Propriedades:

a) Média Aritmética: uma sequência de três termos é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois:

$$(a, b, c) \longrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38) \longrightarrow 20 = \frac{2+38}{2}$$

b) Termos equidistantes: em toda P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63)

$$3+63 = 8+58 = 13+53 = 18+48 = 23+43 = 28+38$$

6. Interpolação Aritmética:

Em toda sequência finita os termos a_1 e a_n são chamados extremos e os demais são chamados meios.

Exercícios Resolvidos:

1- Calcule a razão da P.A. que tem termo $a_5 = 3/5$ e $a_6 = 2$

Solução: $r = a_6 - a_5 = 2 - 3/5 = 7/5$

2- Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Solução:

$$(x - r) + x + (x + r) = 24 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

$$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 440 \quad \rightarrow \quad r = +/- 3$$

P.A. = (5, 8, 11) para $x = 8$ e $r = 3$ ou (11, 8, 5) para $x = 8$ e $r = -3$

3- Determine o 51º termo da P.A. (4, 10, 16, 22,...)

Solução: $a_n = a_1 + (n - 1) r$

$$a_{51} = 4 + (51 - 1) \cdot 6$$

$$a_{51} = 304$$

4- Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.A. (3, 7, 11, 15,...)

Solução: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \quad a_{20} = a_1 + (n-1) \cdot r = 3 + (20-1) \cdot 4$$

$$S_{20} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} \quad a_{20} = 79$$

$$S_{20} = 820$$

5- Determine x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma P.A.

Solução: $(2x+1) - x = (5x+7) - (2x+1) \quad x = -5/2$

6- Interpole 5 meios aritméticos entre 6 e 30.

Solução: formar uma P.A. de 7 termos, onde $a_1 = 6$ e $a_7 = 30$

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

